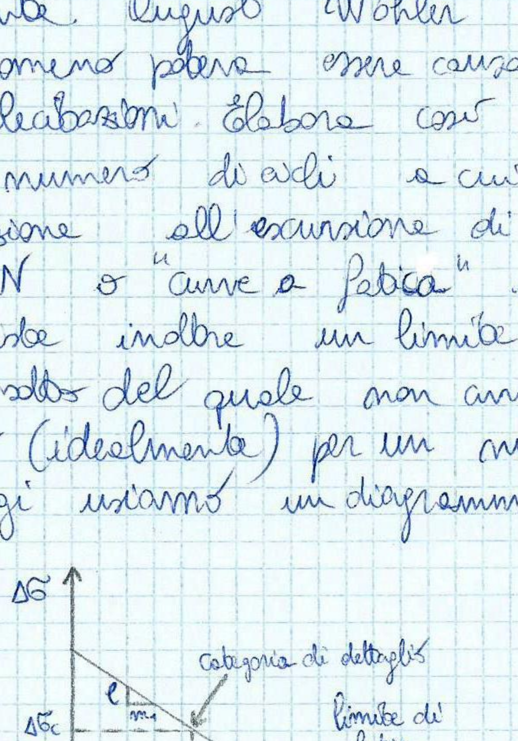
Fatica

La fatica provoca una progressiva diminuzione della resistenza dell'acciaio rispetto al valore originario. Ciò è dovuto a una sollecitazione con intensità oscillante nel tempo che sottopone a cicli di carico ripetuti il materiale.

Tra il 1860 e il 1870 vennero condotti i primi studi sulla fatica. Ciò a seguito delle rotture di assi ferroviari che erano stati progettati per resistere a carichi statici elevatissimi. Essi si rompevano d'improvviso e inspiegabilmente. August Wöhler intuisce per primo che il fenomeno potesse essere causato dalla ciclicità delle sollecitazioni. Elabora così diagrammi che descrivono il numero di cicli a cui è soggetto un elemento in relazione all'escursione di tensione. Sono i diagrammi S-N o "curve a fatica" o diagrammi di Wöhler.
Esiste inoltre un limite inferiore all'escursione al di sotto del quale non avviene rottura fatica nemmeno (idealmente) per un numero infinito di cicli.
Oggi usiamo un diagramma in scala bi-logaritmica:



Vi sono tre tratti lineari, che analiticamente sono identificati da:

$$N = \frac{a_1}{(\Delta\sigma)^{m_1}} \quad \text{per } \Delta\sigma_D \leq \Delta\sigma$$

$$N = \frac{a_2}{(\Delta\sigma)^{m_2}} \quad \text{per } \Delta\sigma_L \leq \Delta\sigma \leq \Delta\sigma_D$$

$$N \to \infty \quad \text{per } \Delta\sigma \leq \Delta\sigma_L$$

In cui N è il numero di cicli e a_1, a_2, m_1, m_2 dipendono dal materiale e/o dall'elemento esaminato.
$\Delta\sigma_L$ è il limite di fatica, caratterizzato da $N = 10^8$. Al di sotto di esso il materiale può sopportare infiniti cicli senza rompersi. $\Delta\sigma_D$ determina il cambio di pendenza ed è caratterizzato da un numero di cicli $N = 5 \cdot 10^6$.
$\Delta\sigma_C$ definisce la categoria di dettaglio strutturale, caratterizzata da numero di cicli $N = 2 \cdot 10^6$.

Possiamo invertire le relazioni per ottenere $\Delta\sigma$ in funzione di N:

$$\Delta\sigma = \left(\frac{a_1}{N}\right)^{1/m_1} \text{ per } N \leq 5 \cdot 10^6 \qquad \Delta\sigma = \left(\frac{a_2}{N}\right)^{1/m_2} \text{ per } 5 \cdot 10^6 \leq N \leq 10^8$$

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_L \text{ per } N \geq 10^8$$

Per le costruzioni metalliche si pongono $m_1 = 3$ e $m_2 = 5$.
Possiamo così esprimere a_1, a_2, $\Delta\sigma_L$ e $\Delta\sigma_D$ in funzione di $\Delta\sigma_C$:

a) $N = 2 \cdot 10^6 = \dfrac{a_1}{(\Delta\sigma_C)^3} \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 10^6 \, (\Delta\sigma_C)^3$

b) $\Delta\sigma_D = \left(\dfrac{a_1}{5 \cdot 10^6}\right)^{1/3} = \left[\dfrac{2 \cdot \cancel{10^6} \cdot (\Delta\sigma_C)^3}{5 \cdot \cancel{10^6}}\right]^{1/3} = 0{,}737 \; \Delta\sigma_C$

c) $\Delta\sigma_D = \left(\dfrac{a_2}{5 \cdot 10^6}\right)^{1/5} \Rightarrow 0{,}737 \; \Delta\sigma_C = \left(\dfrac{a_2}{5 \cdot 10^6}\right)^{1/5} \Rightarrow a_2 = 1{,}086 \cdot 10^6 \, (\Delta\sigma_C)^5$

d) $N = 10^8 = \dfrac{a_2}{(\Delta\sigma_L)^5} \Rightarrow \Delta\sigma_L = \left(\dfrac{a_2}{10^8}\right)^{1/5} = \left[\dfrac{1{,}086 \cdot 10^6 \cdot (\Delta\sigma_C)^5}{10^8}\right]^{1/5} = 0{,}405 \; \Delta\sigma_C$

Possiamo esprimere le due forme delle curve a fatica nel modo seguente:

$$N = 2 \cdot 10^6 \left(\frac{\Delta\sigma_C}{\Delta\sigma}\right)^3 \quad \text{per } \Delta\sigma_D = 0{,}737 \; \Delta\sigma_C \leq \Delta\sigma$$

$$N = 1{,}086 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{\Delta\sigma_C}{\Delta\sigma}\right)^5 \quad \text{per } \Delta\sigma_L = 0{,}405 \; \Delta\sigma_C \leq \Delta\sigma \leq \Delta\sigma_D = 0{,}737 \, \Delta\sigma_C$$

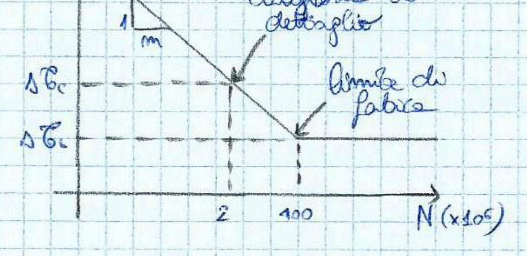
$$N \to \infty \quad \text{per } \Delta\sigma \leq \Delta\sigma_L = 0{,}405 \; \Delta\sigma_C$$

$$\Delta\sigma = \frac{126}{N^{1/3}} \; \Delta\sigma_C \quad \text{per } N \leq 5 \cdot 10^6$$

$$\Delta\sigma = \frac{16{,}11}{N^{1/5}} \; \Delta\sigma_C \quad \text{per } 5 \cdot 10^6 \leq N \leq 10^8$$

$$\Delta\sigma = 0{,}405 \; \Delta\sigma_C \quad \text{per } N \geq 10^8$$

Per le tensioni tangenziali non c'è variazione di pendenza, la retta è unica:



$$N = \frac{a}{(\Delta\tau)^m} \quad \text{per } \Delta\tau \leq \Delta\tau_L$$

$$N \to \infty \quad \text{per } \Delta\tau \geq \Delta\tau_L$$

$$\Delta\tau = \left(\frac{a}{N}\right)^{1/m} \quad \text{per } N \leq 10^8$$

$$\Delta\tau = \Delta\tau_L \quad \text{per } N \geq 10^8$$

Ponendo $m=5$ possiamo anche qui ricavare a e $\Delta\tau_L$ in funzione di $\Delta\tau_C$:

a) $N = 2\cdot10^6 = \frac{a}{(\Delta\tau_C)^5} \Rightarrow a = 2\cdot10^6\cdot(\Delta\tau_C)^5$

b) $N = 10^8 = \frac{a}{(\Delta\tau_L)^5} \Rightarrow \Delta\tau_L = \left(\frac{a}{10^8}\right)^{1/5} = \left[\frac{2\cdot10^6(\Delta\tau_C)^5}{10^8}\right]^{1/5} = 0{,}457\cdot\Delta\tau_C$

Riscriviamo le formule precedenti come segue:

$N = 2\cdot10^6\cdot\left(\frac{\Delta\tau_C}{\Delta\tau}\right)^5$ per $\Delta\tau \leq 0{,}457\,\Delta\tau_C$ $\quad$ $\Delta\tau = \frac{18{,}206}{N^{1/5}}\cdot\Delta\tau_C$ per $N \leq 10^8$

$N \to \infty$ per $\Delta\tau \geq 0{,}457\cdot\Delta\tau_C$ $\quad$ $\Delta\tau = 0{,}457\,\Delta\tau_C$ per $N \geq 10^8$

Nell'analisi finora condotta abbiamo supposto che la tensione media attorno alla quale avvenivano le oscillazioni fosse nulla. Spesso in realtà essa non è nulla, ma è data da:

$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{A}$ $\qquad$ $\sigma_{min} = \frac{F_{min}}{A}$

$\Rightarrow \sigma_m = \frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}$, $\sigma_a = \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2}$, $\Delta\sigma = S$

Definiamo i rapporti di sforzo e di ampiezza:

$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ $\qquad$ $A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}$

Il ciclo a media σ_m non nulla viene ricondotto a uno a media nulla definendo un ciclo equivalente di escursione della tensione $\Delta\sigma_e$ che causa lo stesso comportamento a fatica del primo. Vale la relazione (in campo elastico lineare):

$$\Delta\sigma_e = \Delta\sigma\cdot\frac{\sigma_R}{\sigma_R-\sigma_m}$$

Passiamo al danno e alla vita a fatica. Il danno accumulato è:

$$d(T) = \frac{n(T)}{N}$$

Con n numero di cicli di tensione e N numero di cicli che conduce l'elemento al collasso. Per $n=0 \Rightarrow d=0$, per $n=N \Rightarrow d=1$. Nel primo caso non c'è danno, nel secondo c'è il collasso per fatica. La vita a fatica è il periodo di tempo T_f per cui il danno è pari a 1:

$$d(T_f) = \frac{n(T_f)}{N} = 1 \Rightarrow T_f = \frac{1}{d(1)} = \frac{N}{n(1)}$$

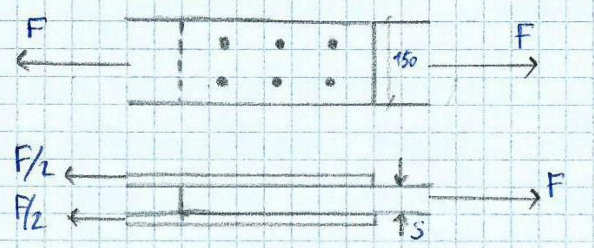
Nel corso del tempo l'elemento accumula un danno pari a:

$$D(T)=\sum_j d_j(T) \Rightarrow D(T)=\sum_j \frac{n_j(T)}{N_j}$$

Inoltre:

$$D(T_f)=1 \Rightarrow T_f=\frac{1}{D(1)}=\frac{1}{\sum_j \frac{n_j(1)}{N_j}}$$

Ecco un esempio su una bullonatura:



$\Delta\sigma_C = 90\ N/mm^2$ $\quad s = 16\ mm$

$\phi = 15\ mm$

$$N_{pl,Rd} = \frac{16 \cdot 150 \cdot 275}{1{,}05} = 628571\ N$$

$$N_{t,Rd} = \frac{0{,}9 \cdot 16\,(150-2\cdot 15)\cdot 430}{1{,}25} = 594432\ N$$

$$\Rightarrow N_{u,Rd} = \min\{628571;\ 594432\} = 594432$$

Massimo sforzo ciclico per $N=10^6 < 5\cdot 10^6$ cicli di carico:

$$\Delta\sigma = \frac{126}{(10^6)^{1/3}}\cdot 90 = 113{,}4\ N/mm^2 \Rightarrow \sigma = \frac{\Delta\sigma}{2} = 56{,}7\ N/mm^2$$

$$\Rightarrow N_u = 16\,(150-2\cdot 15)\cdot 56{,}7 = 108864\ N/mm^2$$

Massimo sforzo ciclico per $N=10^5$ cicli di carico:

$$\Delta\sigma = \frac{126}{10^{5/3}}\cdot 90 = 244{,}3\ N/mm^2 \Rightarrow \sigma = \frac{\Delta\sigma}{2} = 122{,}2\ N/mm^2$$

$$\Rightarrow N_u = 16\,(150-2\cdot 15)\cdot 122{,}2 = 234624\ N$$

Massimo numero di cicli di carico che il collegamento è in grado di sopportare per $\sigma = 250\ N/mm^2$:

$$\Delta\sigma = 2\sigma = 500\ N/mm^2 \Rightarrow \Delta\sigma_D = 0{,}737\,\Delta\sigma_C = 66{,}33\ N/mm^2$$

$$\Rightarrow N = 2\cdot 10^6 \cdot \left(\frac{90}{500}\right)^3 = 11664 \simeq 10^4 \text{ cicli}$$

Se la tensione ciclica è $\Delta\sigma = 200\ N/mm^2$ con tensione media $\sigma_m = 100\ N/mm^2$:

$$\Delta\sigma_e = \Delta\sigma \cdot \frac{\sigma_R}{\sigma_R-\sigma_m} = 200 \cdot \frac{430}{430-100} = 260\ N/mm^2$$

$$\Rightarrow N = 2\cdot 10^6 \cdot \left(\frac{90}{260}\right)^3 = 82377 \text{ cicli}$$

Per $n(1) = 10000$ cicli all'anno la vita a fatica è data da:

$$d(1) = \frac{10000}{82377} = 0{,}12 \Rightarrow T_f = \frac{1}{0{,}12} = 8{,}2 \text{ anni}$$

Possiamo a questo punto affrontare la verifica di sicurezza a fatica. Può essere svolta in due modi. Col metodo dei coefficienti parziali deve essere soddisfatta la relazione:

$$\Delta\sigma_d \leq \frac{\Delta\sigma_R}{\gamma_R}$$

Con $\Delta\sigma_d$ tensione normale di progetto, $\Delta\sigma_R$ resistenza propria del dettaglio. γ_R assume diversi valori (1,00, 1,15 o 1,35) a seconda che l'elemento sia sensibile o meno alla fatica e che le conseguenze della rottura siano moderate o significative.

Il secondo metodo prevede di valutare la vita a fatica del dettaglio, che deve essere sufficientemente minore della vita nominale V_N del dettaglio:

$$T_f = \frac{N_R}{m(t)} \leq V_N$$

Se sono applicate diverse escursioni della tensione:

$$T_f = \frac{1}{\sum_j \frac{m_j(t)}{N_{Rj}}}$$

Tornando ai coefficienti parziali si può eseguire la verifica anche sulle tensioni:

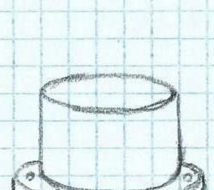
$$\Delta\tau_d \leq \frac{\Delta\tau_R}{\gamma_R}$$

Se vi sono simultaneamente cicli di tensione normale e tangenziale:

$$\left(\frac{\gamma_R \cdot \Delta\sigma_d}{\Delta\sigma_R}\right)^3 + \left(\frac{\gamma_R \cdot \Delta\tau_d}{\Delta\tau_R}\right)^5 \leq 1$$

Passiamo a un esempio con elemento tubolare:

S235 $\quad R = 250$ mm $\quad t = 14$ mm



piastra con coppia di cordoni di codice 12

$\Delta\sigma_C = 40\ N/mm^2 \quad V_N = 10$ anni

$\gamma_R = 1,15$ forza assiale trascurabile

Abbiamo:

$$J_x = \frac{\pi}{4} \cdot (250^4 - 236^4) = 631621589\ mm^4$$

$$\Rightarrow M_{xe} = \frac{631621589 \cdot 235}{250} = 593724293\ Nmm$$

Supponiamo che il momento di progetto sia $M_{xd} = 200$ kNm, applicato ciclicamente $n = 5 \cdot 10^4$ volte all'anno:

$n_T = n \cdot V_N = 5 \cdot 10^4 \cdot 10 = 5 \cdot 10^5$ cicli $\quad \sigma_d = \frac{20000000 \cdot 250}{631621589} = 79,2\ N/mm^2$

$\Rightarrow \Delta\sigma_d = 2 \cdot 79,2 = 158,4\ N/mm^2$

Lo sforzo assiale è trascurabile, quindi $\sigma_m = 0$

Avendo $N = 5 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^6$:

$\Delta\sigma_R = \frac{126}{(5 \cdot 10^5)^{1/3}} \cdot 40 = 63,5\ N/mm^2 \Rightarrow \frac{\Delta\sigma_R}{\gamma_M} = \frac{63,5}{1,15} = 55,2\ N/mm^2 < 158,4\ \frac{N}{mm^2} = \Delta\sigma_d$

La verifica non è soddisfatta. Possiamo operare anche in termini duali:

$\Delta\sigma_D = 0,737 \cdot 40 = 29,48\ N/mm^2 \Rightarrow \Delta\sigma_L = 0,549 \cdot 29,48 = 16,18\ N/mm^2$

Essendo $\Delta\sigma_{de} = 1,15 \cdot 158,4 = 182,16\ N/mm^2 > 29,48\ N/mm^2 = \Delta\sigma_D$:

$N_R = 2 \cdot 10^6 \left(\frac{40}{182,16}\right)^3 = 21176$

Subendo $n = 5 \cdot 10^4$ cicli all'anno, il danno annuale è:

$D(1) = d(1) = \frac{n(1)}{N} = \frac{5 \cdot 10^4}{21176} = 2,36 \Rightarrow T_f = \frac{1}{D(1)} = \frac{1}{2,36} = 0,424 \simeq 5$ mesi

La vita a fatica è molto inferiore ai 10 anni. Con una tensione di $79,2\ N/mm^2$, che è circa un terzo della tensione di snervamento di $235\ N/mm^2$, il collegamento ha 5 mesi di vita.

Se proviamo a usare il collegamento con codice 11 abbiamo $\Delta\sigma_C = 71\ N/mm^2$ e otteniamo:

$\Delta\sigma_R = \frac{126}{(5 \cdot 10^5)^{1/3}} \cdot 71 = 112,7\ N/mm^2$

$\Rightarrow \Delta\sigma_d = 158,4\ N/mm^2 > 98,0\ N/mm^2 = \frac{\Delta\sigma_R}{\gamma_M}$

La verifica non è soddisfatta. In termini duali:

$\Delta\sigma_D = 0,737 \cdot 71 = 52,33\ N/mm^2 \Rightarrow \Delta\sigma_L = 0,549 \cdot 52,33 = 28,73\ N/mm^2$

Essendo $\Delta\sigma_{de} = 1,15 \cdot 158,4 = 182,16\ N/mm^2 > 52,33\ N/mm^2 = \Delta\sigma_D$:

$N_R = 2 \cdot 10^6 \left(\frac{71}{182,16}\right)^3 = 118426$

Subendo $n = 5 \cdot 10^4$ cicli all'anno:

$D(1) = \frac{5 \cdot 10^4}{118426} = 0,42 \Rightarrow T_f = \frac{1}{0,42} = 2,37$ anni < 10 anni $= V_N$

Per aumentare la vita a fatica portiamo il raggio esterno a $R = 280$ mm:

$J_x = \frac{\pi}{4} \cdot \left[280^4 - 266^4\right] = 895470510\ mm^4$

$\Rightarrow \sigma_d = \frac{20000000 \cdot 280}{895470510} = 62,54\ N/mm^2$

$\Rightarrow \Delta\sigma_d = 2 \cdot 62,54 = 125,07\ N/mm^2$

Usiamo ancora $\Delta\sigma_c = 71\ N/mm^2$ e $\Delta\sigma_R = 112,7\ N/mm^2$:

$$\Delta\sigma_d = 125,1\ N/mm^2 > 98,0\ N/mm^2 = \frac{\Delta\sigma_R}{\gamma_R}$$

In termini duali abbiamo sempre $\Delta\sigma_D = 52,33\ N/mm^2$ e $\Delta\sigma_L = 28,73\ N/mm^2$. Poi:

$$\Delta\sigma_{de} = 1,15 \cdot 125,1 = 143,85\ N/mm^2 > 52,33\ N/mm^2 = \Delta\sigma_D$$

Quindi:

$$N_R = 2 \cdot 10^6 \left(\frac{71}{143,86}\right)^3 = 240553$$

$$\Rightarrow D(1) = \frac{5 \cdot 10^4}{240553} = 0,208 \Rightarrow T_f = \frac{1}{0,208} = 4,8\ anni < 10\ anni = V_N$$

La vita a fatica rimane comunque limitata: è molto difficile riuscire a farla aumentare. Incrementare la tensione di snervamento non ha alcun effetto.